Círculos

6

6.1 EL CÍRCULO; RELACIONES CIRCULARES

Los siguientes términos están relacionados con el círculo. Aunque algunos de ellos ya han sido definidos con anterioridad se incluyen aquí por conveniencia.

Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. El símbolo para un círculo es $\odot$; para varios círculos es $\circledS$.

La *circunferencia* de un círculo es la distancia alrededor del círculo. Tiene 360°.

Un *radio* del círculo es un segmento de línea que une el centro con algún punto sobre el círculo.

Nota: dado que todos los radios de un círculo determinado tienen la misma longitud, se usará algunas veces la palabra *radio* para indicar el número que es "la longitud del radio".

Un *ángulo central* es un ángulo formado por dos radios.

Un *arco* es una parte continua de un círculo. El símbolo para un arco es $\frown$. Un *semicírculo* es un arco que mide la mitad de la circunferencia de un círculo.

Un *arco menor* es un arco que es más pequeño que un semicírculo. Un *arco mayor* es uno que es más grande que un *semicírculo*.

Así, en la figura 6-1 el $\overset{\frown}{BC}$ es un arco menor y $\overset{\frown}{BAC}$ es un arco mayor. Se requieren tres letras para denotar un arco mayor.

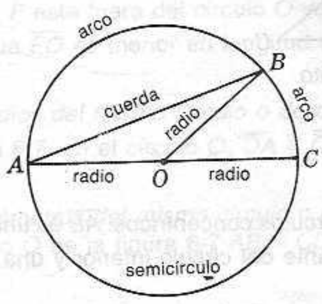


Fig. 6-1

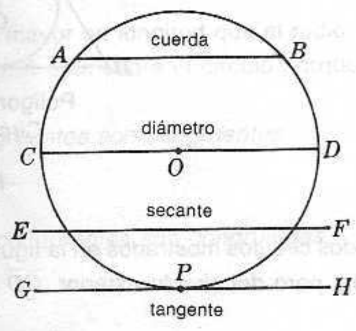


Fig. 6-2

Interceptar un arco implica aislar al arco.

Así en la figura 6-1, $\angle BAC$ y $\angle BOC$ interceptan a $\overset{\frown}{BC}$.

Una *cuerda* de un círculo es un segmento de línea que une dos puntos de la circunferencia.

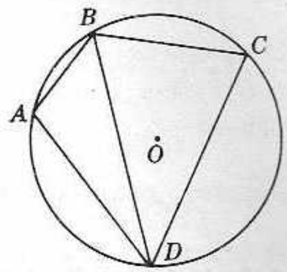
Así, en la figura 6-2, $\overline{AB}$ es una cuerda.

Un *diámetro* de un círculo es una cuerda que pasa a través de su centro. Una *secante* de un círculo es una línea que intercepta al círculo en dos puntos. Una *tangente* a un círculo es una línea que toca al círculo en uno y sólo un punto sin importar qué tanto se extienda la línea.

Así, en la figura 6-2, $\overline{CD}$ es un diámetro del círculo O, $\overleftrightarrow{EF}$ es una secante y $\overleftrightarrow{GH}$ es una tangente al círculo en P. P es el punto de contacto o punto de tangencia.

Un *polígono inscrito* es un polígono tal que todos sus lados son cuerdas de un círculo. Un *círculo circunscrito* es un círculo que pasa por todos los vértices de un polígono.

Así, en la figura 6-3, los $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ y el cuadrilátero $ABCD$ son polígonos inscritos en el círculo O. El círculo O es un círculo circunscrito sobre el cuadrilátero $ABCD$.



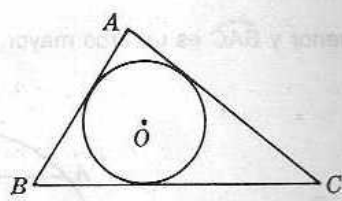
Polígonos inscritos
Círculo circunscrito

Fig. 6-3

Un polígono circunscrito es un polígono tal que todos sus lados son tangentes a un círculo. Un *círculo inscrito* es aquél para el que son tangentes todos los lados de un polígono.

Así, el $\triangle ABC$ es un polígono circunscrito del círculo O en la figura 6-4. El círculo O es un círculo inscrito en el $\triangle ABC$.

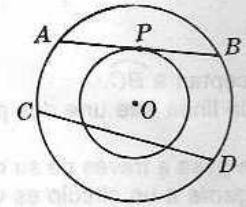
Círculos concéntricos son aquéllos que tienen el mismo centro.



Polígono circunscrito
Círculo inscrito

Fig. 6-4

De este modo, los dos círculos mostrados en la figura 6-5 son círculos concéntricos. $\overline{AB}$ es una tangente del círculo interior y es una cuerda, pero del círculo exterior. $\overline{CD}$ es una secante del círculo interior y una cuerda del exterior.



Círculos concéntricos

Fig. 6-5

Dos círculos son *iguales* si sus radios tienen la misma longitud. Dos círculos son *congruentes* si sus radios son congruentes.

Dos arcos son congruentes si tienen igual medida en grados e igual longitud. El símbolo $m\widehat{AC}$ denota la "medida del arco $\widehat{AC}$."

6.1A Principios relativos a los círculos

Principio 1: *un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales.*

Así, el diámetro $\overline{AB}$ divide al círculo O de la figura 6-6 en dos semicírculos iguales, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADB}$.

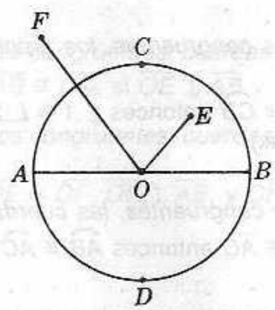


Fig. 6-6

Principio 2: *si una cuerda divide a un círculo en dos partes iguales, entonces es un diámetro.* (Esto es el converso del principio 1.)

Así, si $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ en la figura 6-6, entonces $\overline{AB}$ es un diámetro.

Principio 3: *un punto está fuera, sobre, o dentro de un círculo siempre que su distancia al centro del mismo sea, respectivamente, mayor que, igual a, o menor que el radio.*

En la figura 6-6, F está fuera del círculo O ya que $\overline{FO}$ es mayor en longitud que el radio. El punto E está dentro del círculo puesto que $\overline{EO}$ es menor en longitud que un radio. A está sobre el círculo porque $\overline{AO}$ es un radio.

Principio 4: *los radios del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes.*

Así, en la figura 6-7, en el círculo O, $\overline{OA} \cong \overline{OC}$.

Principio 5: *los diámetros del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-7 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

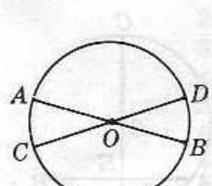


Fig. 6-7

Principio 6: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-8, si $\angle 1 \cong \angle 2$ entonces $\overparen{AC} \cong \overparen{CB}$.

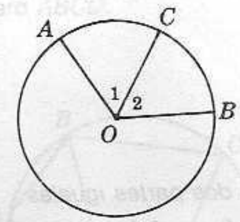


Fig. 6-8

Principio 7: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-8 si $\overparen{AC} \cong \overparen{CB}$ entonces $\angle 1 \cong \angle 2$.
(Los principios 6 y 7 son conversos entre sí.)

Principio 8: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-9 si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\overparen{AB} \cong \overparen{AC}$.

Principio 9: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los arcos congruentes tienen cuerdas congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-9 si $\overparen{AB} \cong \overparen{AC}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
(Los principios 8 y 9 son conversos entre sí.)

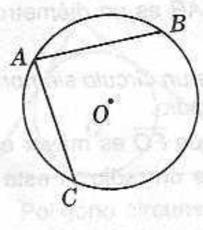


Fig. 6-9

Principio 10: *un diámetro perpendicular a una cuerda bisecta a la cuerda y a sus arcos.*

Así, en el círculo O de la figura 6-10, si $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, entonces $\overline{CD}$ bisecta $\overline{AB}$, $\overparen{AB}$, $\overparen{ACB}$.

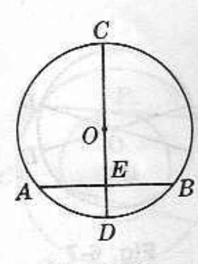


Fig. 6-10

La demostración de este principio se incluye en el capítulo 16.

PRINCIPIO 11: *un bisector perpendicular de una cuerda pasa por el centro del círculo.*
Así, en el círculo O de la figura 6-11, si $\overline{PD}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ entonces $\overline{PD}$ pasa por el centro O.

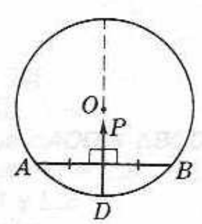


Fig. 6-11

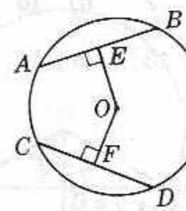


Fig. 6-12

PRINCIPIO 12: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, cuerdas congruentes están a igual distancia del centro.*
Así, en el círculo O de la figura 6-12, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, si $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ y si $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ entonces $\overline{OE} \cong OF$.

PRINCIPIO 13: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, cuerdas que están a igual distancia del centro son congruentes.*
Así, en el círculo O de la figura 6-12 si $\overline{OE} \cong \overline{OF}$, $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, y $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1 PRUEBA SOBRE EL VOCABULARIO ASOCIADO CON LOS CÍRCULOS
En la figura 6-13, asocie un término del lado izquierdo con los nombres del lado derecho:

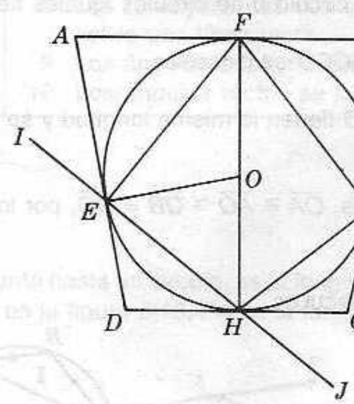


Fig. 6-13

(a)	$\overline{OE}$	1.	radio
(b)	$\overline{FG}$	2.	ángulo central
(c)	$\overline{FH}$	3.	semicírculo
(d)	$\overline{CD}$	4.	arco menor
(e)	$\overline{IJ}$	5.	arco mayor
(f)	$\overset{\frown}{EF}$	6.	cuerda
(g)	$\overset{\frown}{FGH}$	7.	diámetro
(h)	$\overset{\frown}{FEG}$	8.	secante
(i)	$\angle EOF$	9.	tangente
(j)	Círculo O alrededor de $EFGH$	10.	polígono inscrito
(k)	Círculo O en $ABCD$	11.	polígono circunscrito
(l)	Cuadrilátero $EFGH$	12.	círculo inscrito
(m)	Cuadrilátero $ABCD$	13.	círculo circunscrito

Soluciones

(*a*)	1	(*e*)	8	(*h*)	5	(*k*)	12
(*b*)	6	(*f*)	4	(*i*)	2	(*l*)	10
(*c*)	7	(*g*)	3	(*j*)	13	(*m*)	11
(*d*)	9						

6.2 Aplicación de los Principios 4 y 5

En la figura 6-14, indique (*a*) qué tipo de triángulo es *OCD*; (*b*) qué tipo de cuadrilátero es *ABCD*; (*c*) en la figura 6-15, si el círculo *O* = círculo *Q*, ¿qué tipo de cuadrilátero es *OAQB*?

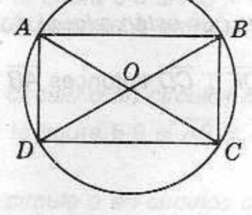


Fig. 6-14

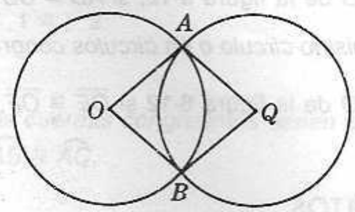


Fig. 6-15

Soluciones

Los radios o diámetros del mismo círculo o de círculos iguales tienen igual longitud.

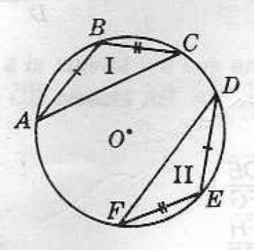
(*a*) Dado que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$, entonces $\triangle OCD$ es isósceles.

(*b*) Dado que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen la misma longitud y se bisectan entre sí, entonces *ABCD* es un rectángulo.

(*c*) Dado que los círculos son iguales, $\overline{OA} \cong \overline{AQ} \cong \overline{QB} \cong \overline{BO}$, por lo tanto, *OAQB* es un rombo.

6.3 Demostración de un Problema sobre Círculos

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
Demuéstrese: $\angle B \cong \angle E$
Plan: Demuéstrese que $\triangle I \cong \triangle II$



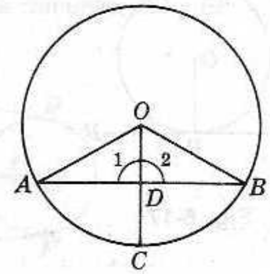
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1. Dado
2. $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EF}$	2. En un círculo, cuerdas ≅ tienen arcos ≅.
3. $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$	3. Si iguales se suman a iguales las sumas son iguales. Definición de arcos ≅.
4. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	4. En un círculo, arcos ≅ tienen cuerdas ≅.
5. $\triangle I \cong \triangle II$	5. s.s.s. ≅ s.s.s.
6. $\angle B \cong \angle E$	6. Las partes correspondientes de ⧋ congruentes son ≅

6.4 Demostración de un Problema de Círculos formulado en Palabras
Demuéstrese que si un radio bisecta a una cuerda entonces es perpendicular a la cuerda.

Soluciones

Dado: círculo O
$\overline{OC}$ bisecta a $\overline{AB}$.
Demuéstrese: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle AOD \cong \triangle BOD$
Demuéstrese que $\angle 1 \cong \angle 2$
también que $\angle 1$ y $\angle 2$
son suplementarios.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Dibújense $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$	1. Entre dos puntos cualesquiera puede dibujarse un segmento de línea recta.
2. $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	2. Los radios de un círculo son congruentes
3. $\overline{OC}$ bisecta a $\overline{AB}$	3. Dado
4. $\overline{AD} \cong \overline{DB}$	4. Bisectar es dividir en dos partes $\cong$
5. $\overline{OD} \cong \overline{OD}$	5. Propiedad reflexiva
6. $\triangle AOD \cong \triangle BOD$	6. s.s.s. $\cong$ s.s.s.
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Las partes correspondientes de $\triangle$ congruentes son $\cong$.
8. $\angle 1$ es suplementario de $\angle 2$	8. Los $\angle$s adyacentes son suplementarios si los lados externos están sobre una línea recta.
9. $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.	9. Los ángulos suplementarios congruentes, son rectos.
10. $\overline{OC} \perp \overline{AB}$	10. Los ángulos rectos se forman con perpendiculares.

6.2 TANGENTES

La *longitud de una tangente* desde un punto hasta un círculo, es la longitud del segmento de la tangente desde el punto dado, hasta el punto de tangencia. Así, en la figura 6-16, *PA* es la longitud de la tangente desde *P* hasta el círculo *O*.

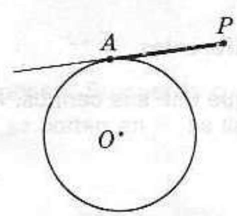


Fig. 6-16

6.2A Principios relativos a las tangentes

Principio 1: *una tangente es perpendicular al radio trazado hacia el punto de contacto.*
Así, si $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O en P y si se traza $\overline{OP}$, entonces $\overline{AB} \perp \overline{OP}$. (Fig. 6-17)

Principio 2: *una línea es tangente a un círculo si es perpendicular a un radio en ese punto*

Así, en la figura 6-17, si $\overleftrightarrow{AB} \perp$ al radio $\overline{OP}$ en P, entonces $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O.

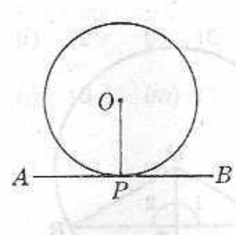


Fig. 6-17

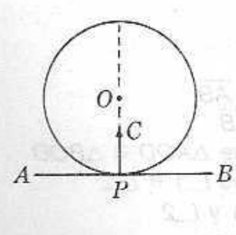


Fig. 6-18

PRINCIPIO 3: *una línea pasa por el centro de un círculo, si es perpendicular a una tangente en su punto de contacto con el círculo.*

Así, en la figura 6-18, si $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O en P, y $\overline{CP} \perp \overleftrightarrow{AB}$ en P, entonces la extensión de $\overline{CP}$ pasará por el centro O.

PRINCIPIO 4: *las tangentes a un círculo dibujadas desde un punto exterior son congruentes.*

Así, si $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes al círculo O en P y Q (Fig. 6-19), entonces $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$.

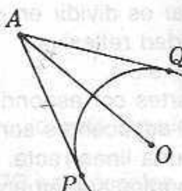


Fig. 6-19

PRINCIPIO 5: *el segmento dibujado desde el centro de un círculo hasta un punto exterior, bisecta al ángulo entre las tangentes desde ese punto al círculo.*

Así, en la figura 6-19, $\overline{OA}$ bisecta $\angle PAQ$ si $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes al círculo O.

6.2B Dos Círculos en posiciones relativas diferentes

La *línea de centros de dos círculos* es la línea que une sus centros. Así, en la figura 6-20, $\overline{OO'}$ es la línea de centros de los círculos O y O'.

Fig. 6-20

Círculos externamente tangentes

En la figura 6-21, los círculos O y O' son externamente tangentes en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente interna común a ambos círculos. La línea de centros $\overline{OO'}$ pasa por P, es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y es igual en longitud a la suma de los radios, $R + r$. También, $\overleftrightarrow{AB}$ bisecta a cada una de las tangentes externas comunes, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.

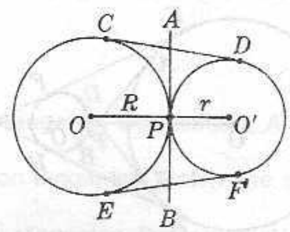


Fig. 6-21

Círculos internamente tangentes

En la figura 6-22, los círculos O y O' son internamente tangentes en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente externa común a ambos círculos. Si se extiende la línea de centros $\overline{OO'}$ pasa por P, es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y es igual en longitud a la diferencia de los radios $R - r$.

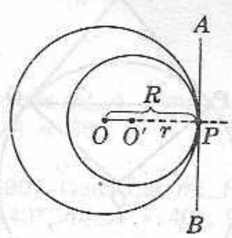


Fig. 6-22

Círculos superpuestos

En la figura 6-23, los círculos O y O' se superponen. Su cuerda común es $\overline{AB}$. Si los círculos son desiguales, sus tangentes externas comunes (iguales) $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ se cortan en P. La línea de centros $\overline{OO'}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ y si se extiende también pasa por P.

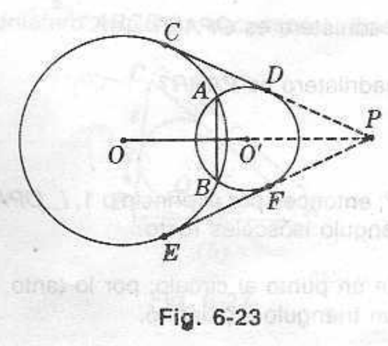


Fig. 6-23

Círculos completamente afuera de sí mismos

En la figura 6-24, los círculos O y O' están completamente afuera uno del otro. Las tangentes internas comunes, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en P. Si los círculos son desiguales, sus tangentes externas comunes, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, cuando se extienden se cortan en P'. La línea de centros $\overline{OO'}$ pasa por P y P'. También, $AB = CD$ y $EF = GH$.

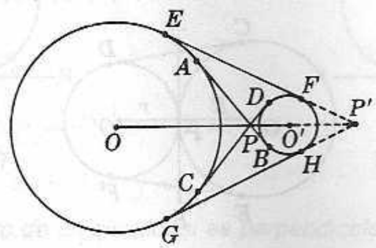


Fig. 6-24

PROBLEMAS RESUELTOS

6.5 Triángulos y Cuadriláteros con Lados Tangentes

En la figura 6-25, los puntos P, Q, y R, son puntos de tangencia.

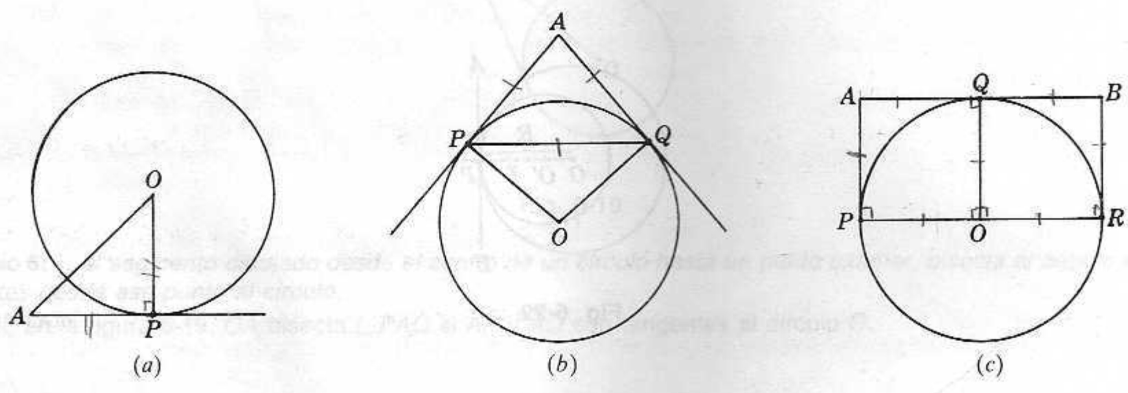


Fig. 6-25

(*a*) Si $AP = OP$, ¿qué tipo de triángulo es OPA? RECTANGULO ISOSCELES

(*b*) Si $AP = PQ$, ¿qué tipo de triángulo es APQ? EQUI

(*c*) Si $AP = OP$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $OPAQ$? CUADRADO

(*d*) Si $\overline{OQ} \perp \overline{PR}$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $PABR$? RECTANG

Soluciones

(*a*) $\overline{AP}$ es tangente al círculo en P; entonces por el principio 1, $\angle OPA$ es un ángulo recto. También $AP = OP$. Por lo tanto, $\triangle OAP$ es un triángulo isósceles recto.

(*b*) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes desde un punto al círculo; por lo tanto, del principio 4, $AP = AQ$. También $AP = PQ$. Entonces, $\triangle APQ$ es un triángulo equilátero.

(*c*) Por el principio 4, $AP = AQ$. También $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son radios $\cong$. En adición, $AP = OP$. Por el principio 1, $\angle APO$ es recto. Entonces, $AP = AQ = OP = OQ$; por lo tanto $OPAQ$ es un rombo con un ángulo recto o un cuadrado.

(*d*) Por el principio 1, $\overline{AP} \perp \overline{PR}$ y $\overline{BR} \perp \overline{PR}$. Entonces, $\overline{AP} \parallel \overline{BR}$ dado que ambos son $\perp$ a $\overline{PR}$. Por el principio 1, $\overline{AB} \perp \overline{OQ}$; también $\overline{PR} \perp \overline{OQ}$ (Dado). Entonces, $\overline{AB} \parallel \overline{PR}$ dado que ambos son $\perp$ a $\overline{OQ}$. Por lo tanto, $PABR$ es un paralelogramo con un ángulo recto o un rectángulo.

6.6 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 1

(*a*) En la figura 6-26(*a*), $\overline{AP}$ es una tangente. Determine $\angle A$ si $\angle m\angle A : m\angle O = 2:3$.

(*b*) En la figura 6-26(*b*), $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes. Determine $m\angle 1$ si $m\angle O = 140°$.

(*c*) En la figura 6-26(*c*), $\overline{DP}$ y $\overline{CQ}$ son tangentes. Determine $m\angle 2$ y $m\angle 3$ si $\angle OPD$ está trisectado y $\overline{PQ}$ es un diámetro.

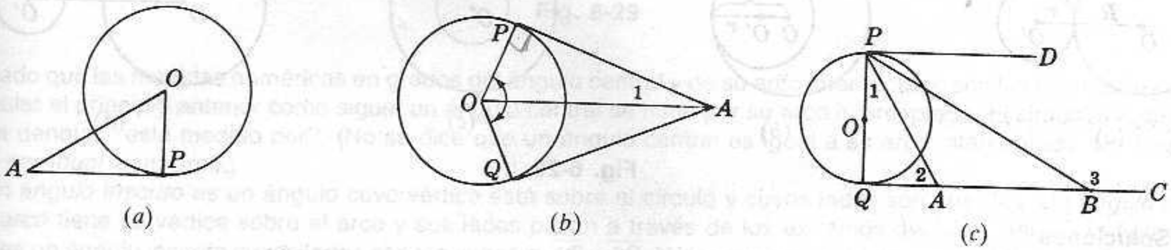


Fig. 6-26

Soluciones

(*a*) Por el principio 1, $m\angle P = 90°$. Entonces $m\angle A + m\angle O = 90°$. Si $m\angle A = 2x$ y $m\angle O = 3x$, entonces $5x = 90$ y $x = 18$. Por lo tanto, $m\angle A = 36°$.

(*b*) Por el principio 1, $m\angle P = m\angle Q = 90°$. Dado que $m\angle P + m\angle Q + m\angle A + m\angle O = 360°$, $m\angle A + m\angle O = 180°$. Dado que $m\angle O = 140°$, $m\angle A = 40°$. Por el principio 5, $m\angle 1 = ½\, m\angle A = 20°$.

(*c*) Por el principio 1, $m\angle DPQ = m\angle PQC = 90°$. Dado que la $m\angle 1 = 30°$, $m\angle 2 = 60°$. Dado que $\angle 3$ es un ángulo externo del $\triangle PQB$, $m\angle 3 = 90° + 60° = 150°$.

6.7 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 4

(*a*) En la figura 6-27(*a*) $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{AB}$ son tangentes. Determine *y*.

(*b*) En la figura 6-27(*b*), $\triangle ABC$ es circunscrito. Determine *x*.

(*c*) En la figura 6-27(*c*), el cuadrilátero *ABCD* es circunscrito. Encuentre *x*.

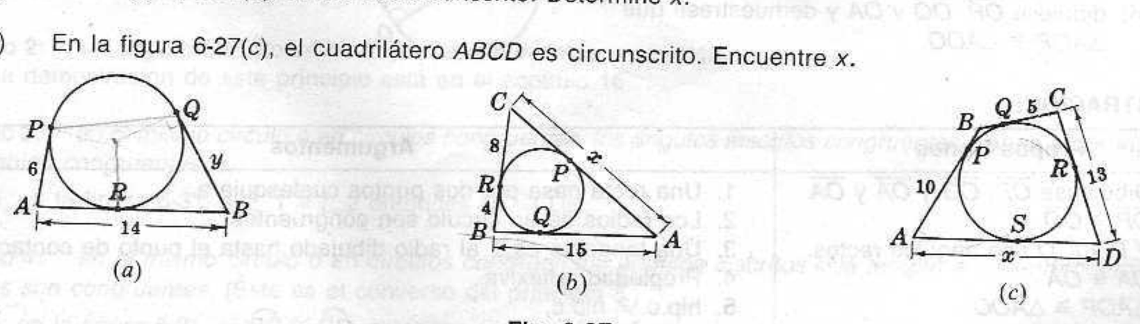


Fig. 6-27

Soluciones

(*a*) Por el principio 4, $AR = 6$, $RB = y$. Entonces, $RB = AB - AR = 14 - 6 = 8$. Por lo tanto, $y = RB = 8$.

(*b*) Por el principio 4, $PC = 8$, $QB = 4$, y $AP = AQ$. Entonces, $AQ = AB - QB = 11$. Por lo tanto, $x = AP + PC = 11 + 8 = 19$.

(*c*) Por el principio 4, $AS = 10$, $CR = 5$, y $RD = SD$. Entonces, $RD = CD - CR = 8$. Por lo tanto, $x = AS + SD = 10 + 8 = 18$.

6.8 Determinación de la Línea de Centros

Dos círculos tienen radios 9 y 4 respectivamente. Calcúlese la longitud de su línea de centros (*a*) si los círculos son externamente tangentes, (*b*) si son internamente tangentes, (*c*) si los círculos son concéntricos, (*d*) si los círculos están separados en 5 unidades de longitud. (Fig. 6-28.)

Fig. 6-28

Soluciones

Sean R el radio del círculo más grande, r el radio del círculo más pequeño.

(*a*) Dado que $R = 9$, $r = 4$, $OO' = R + r = 9 + 4 = 13$.

(*b*) Dado que $R = 9$, $r = 4$, $OO' = R - r = 9 - 4 = 5$.

(*c*) Dado que ambos círculos tienen el mismo centro, su línea de centro tiene longitud cero.

(*d*) Dado que $R = 9$, $r = 4$, $d = 5$, $OO' = R + d + r = 9 + 5 + 4 = 18$.

6.9 Demostración de un Problema sobre Tangentes Formulado en Palabras

Demuéstrese: las tangentes a un círculo desde un punto externo son congruentes (Principio 4).

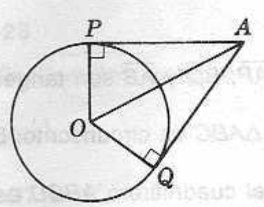
Dado: círculo O

$\overline{AP}$ es una tangente en P.

$\overline{AQ}$ es una tangente en Q.

Demuéstrese: $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$

Plan: dibúiese $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OA}$ y demuéstrese que $\triangle AOP \cong \triangle AOQ$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Dibújense $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OA}$ y $\overline{OA}$	1. Una recta pasa por dos puntos cualesquiera.
2. $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$	2. Los radios de un círculo son congruentes.
3. $\angle P$ y $\angle Q$ son ángulos rectos.	3. Una tangente es $\perp$ al radio dibujado hasta el punto de contacto.
4. $\overline{OA} \cong \overline{OA}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\triangle AOP \cong \triangle AOQ$	5. hip.c. ≅ hip.c.
6. $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$	6. Las partes correspondientes de ≜ congruentes son congruentes.

6.3 MEDICIÓN DE ÁNGULOS Y ARCOS EN UN CÍRCULO

Un *ángulo central* tiene el mismo número de grados que el arco que lo intercepta. Así, como se muestra en la figura 6-29, un ángulo central, si es recto, intercepta a un arco de 90°; un ángulo central de 40° intercepta a un arco de 40°; y un ángulo central, si es derecho, intercepta un semicírculo de 180°.

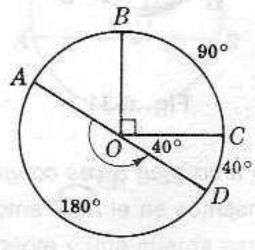


Fig. 6-29

Dado que las medidas numéricas en grados del ángulo central y de su arco interceptado son las mismas, es posible reformular el principio anterior como sigue: un ángulo central se mide por su arco interceptado. El símbolo $\doteq$ se utilizará para denotar "está medido por". (No se dice que un ángulo central es igual a su arco interceptado. Un ángulo *no puede ser igual* a un arco.)

Un *ángulo inscrito* es un ángulo cuyo vértice está sobre el círculo y cuyos lados son cuerdas. Un *ángulo inscrito en un arco* tiene su vértice sobre el arco y sus lados pasan a través de los extremos del arco. Así, en la figura 6-30, el $\angle A$ es un ángulo inscrito cuyos lados son las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Nótese que el $\angle A$ intercepta al BC y que está inscrito en el BAC.

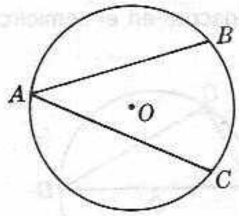


Fig. 6-30

6.3A Principios sobre medidas de ángulos

Principio 1: *un ángulo central se mide por su arco interceptado.*

Principio 2: *un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado.*
Una demostración de este principio está en el capítulo 16.

Principio 3: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los ángulos inscritos congruentes, tienen arcos interceptados también congruentes.*
Así, en la figura 6-31, si $\angle 1 \cong \angle 2$ entonces $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$.

Principio 4: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, ángulos inscritos que tengan arcos interceptados congruentes son congruentes.* (Éste es el converso del principio 3.)
Así, en la figura 6-31, si $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$, entonces $\angle 1 \cong \angle 2$

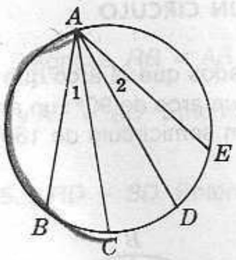


Fig. 6-31

PRINCIPIO 5: *los ángulos inscritos en el mismo arco o en arcos congruentes son congruentes.*

Así, en la figura 6-32, si $\angle C$ y $\angle D$ están inscritos en el $\overset{\frown}{ABC}$ entonces $\angle C \cong \angle D$.

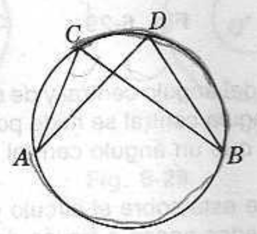


Fig. 6-32

PRINCIPIO 6: *un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.*

Así, en la figura 6-33, dado que el $\angle C$ está inscrito en el semicírculo $\overset{\frown}{ACD}$, entonces $m\angle C = 90°$.

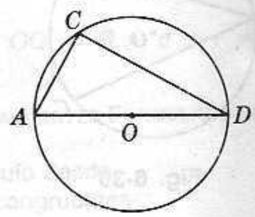


Fig. 6-33

PRINCIPIO 7: *los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.*

De este modo, en la figura 6-34, si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, $\angle A$ es el suplemento del $\angle C$.

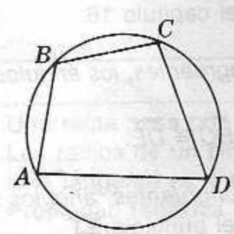


Fig. 6-34

PRINCIPIO 8: *las líneas paralelas interceptan a arcos congruentes en un círculo.*

Así, en la figura 6-35, si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$. Si la tangente $\overleftrightarrow{FG}$ es paralela a $\overline{CD}$, entonces $\widehat{PC} \cong \widehat{PD}$.

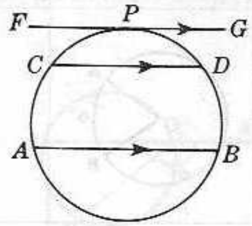


Fig. 6-35

PRINCIPIO 9: *un ángulo formado por una tangente y una cuerda está medido por la mitad de su arco interceptado.*

PRINCIPIO 10: *un ángulo formado por dos cuerdas que se interceptan, está medido por la mitad de la suma de sus arcos interceptados.*

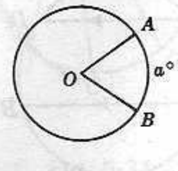
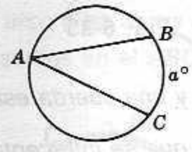
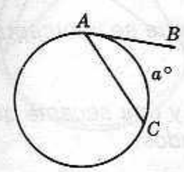
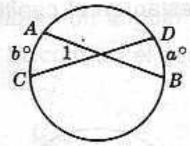
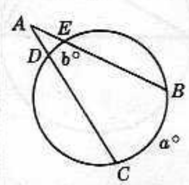
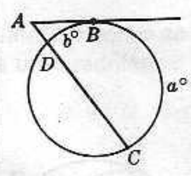
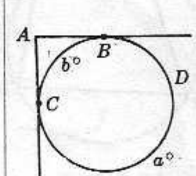
PRINCIPIO 11: *el ángulo formado por dos secantes que se interceptan afuera del círculo, está medido por la mitad de la diferencia de los arcos interceptados.*

PRINCIPIO 12: *el ángulo formado por una tangente y una secante que se interceptan afuera del círculo, está medido por la mitad de la diferencia de los arcos interceptados.*

PRINCIPIO 13: *el ángulo formado por dos tangentes que se interceptan afuera del círculo, está medido por la mitad de la diferencia de los arcos interceptados*

Las demostraciones de los principios 10 al 13 están en el capítulo 16.

6.3B Tabla de los principios sobre medición de ángulos

Posición del vértice	Tipo de ángulo	Diagrama	Fórmula de la medida	Método de medida
Centro del círculo	Ángulo central (principio 1)		$\angle O \doteq \widehat{AB}$ $m\angle O = a°$	Arco interceptado
Sobre el círculo	Ángulo inscrito (principio 2)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$ $m\angle A = \frac{1}{2}a°$	Mitad del arco interceptado
	Ángulo formado por una cuerda y una tangente (principio 9)			
Dentro del círculo	Ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan (principio 10)		$\angle 1 \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{AC} + \widehat{BD})$ $m\angle 1 = \frac{1}{2}$ $(a° + b°)$	Mitad de la suma de los arcos interceptados
Fuera del círculo	Ángulo formado por dos secantes (principio 10)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{BC} - \widehat{DE})$ $m\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(a° - b°)$	Mitad de la diferencia de los arcos interceptados
	Ángulo formado por una secante y una tangente (principio 12)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{BC} - \widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}$ $(a° - b°)$	
	Ángulo formado por dos tangentes (principio 13)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{BDC} - \widehat{BC})$ $m\angle A = \frac{1}{2}$ $(a° - b°)$ También, $m\angle A = (180 - b)°$	

Nota: para encontrar el ángulo formado por una secante y una cuerda que se intersectan sobre el círculo, primero encuéntrese la medida del ángulo inscrito adjunto y en seguida résteselo a 180°. Así, si la secante $\overline{AB}$ corta a la cuerda $\overline{CD}$ en C, sobre el círculo de la figura 6-36, para encontrar $m\angle y$, primero determínese la medida del $\angle x$ inscrito. Entonces, $m\angle y = 180 - m\angle x$.

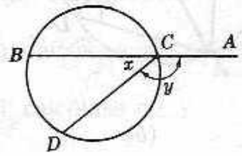


Fig. 6-36

PROBLEMAS RESUELTOS

6.10 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 1 Y 2

(*a*) En la figura 6-37(*a*), si $m\angle y = 46°$, calcule $m\angle x$.

(*b*) En la figura 6-37(*b*), si $m\angle y = 112°$, calcule $m\angle x$.

(*c*) En la figura 6-37(*c*), si $m\angle x = 75°$, calcule $m\widehat{y}$.

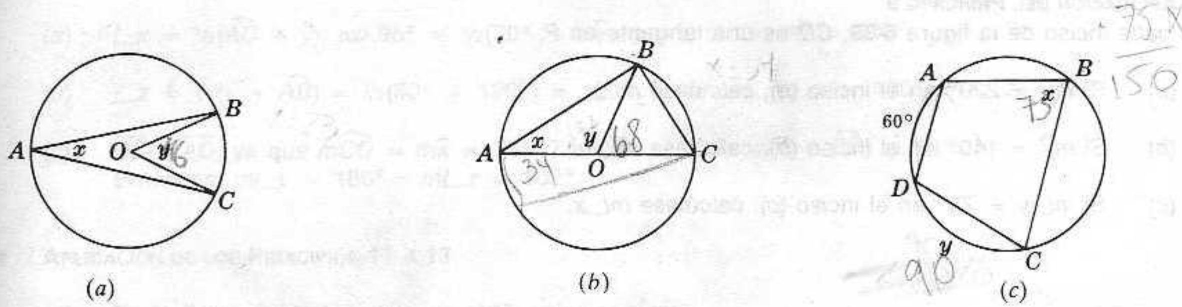


Fig. 6-37

Soluciones

(*a*) $\angle y \doteq \widehat{BC}$, entonces $\widehat{BC} = 46°$. Por lo tanto, $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}(46°) = 23°$, esto es $m\angle x = 23°$.

(*b*) $\angle y \doteq \widehat{AB}$, esto es $m\widehat{AB} = 112°$.
$mBC = m(\widehat{ABC} - \widehat{BC}) = 180° - 112° = 68°$. Entonces, $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}(68)° = 34°$. Esto es $m\angle x = 34°$.

(*c*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{ADC}$, así, $m\widehat{ADC} = 150°$. Entonces, $m\widehat{y} = m(\widehat{ADC} - \widehat{AD}) = (150° - 60°) = 90°$.

6.11 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 3 A 8
Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-38.

x = 50
y = 65

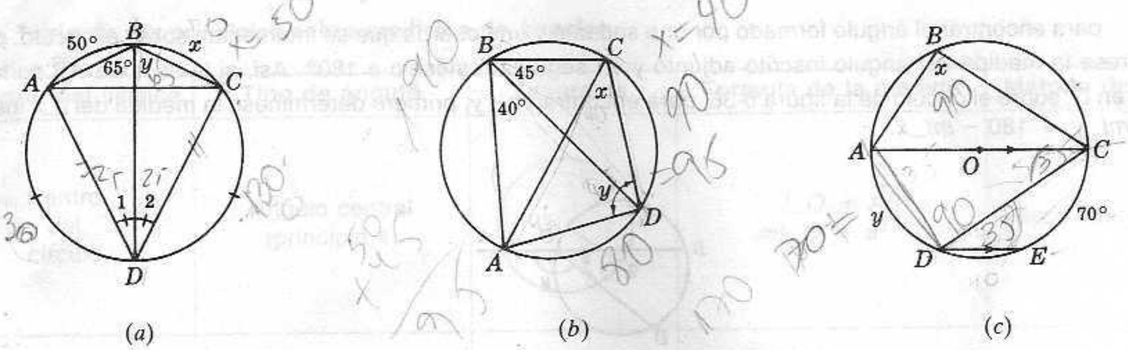


Fig. 6-38

Soluciones

(*a*) Dado que $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\widehat{x} = m\widehat{AB} = 50°$. Dado que $\widehat{AD} = \widehat{CD}$, $m\angle y = m\angle ABD = 65°$.

(*b*) El $\angle ABD$ y $\angle x$ están inscritos en $\widehat{ABD}$; por lo tanto $m\angle x = m\angle ABD = 40°$. $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito; por lo tanto $m\angle y = 180° - m\angle B = 95°$.

(*c*) Dado que $\angle x$ está inscrito en un semicírculo, la $m\angle x = 90°$. Como $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $m\widehat{y} = m\widehat{CE} = 70°$.

6.12 Aplicación del Principio 9

En cada inciso de la figura 6-39, *CD* es una tangente en *P*.

(*a*) Si $m\widehat{y} = 220°$ en el inciso (*a*), calcúlese $m\angle x$.

(*b*) Si $m\widehat{y} = 140°$ en el inciso (*b*), calcúlese $m\angle x$.

(*c*) Si $m\angle y = 75°$ en el inciso (*c*), calcúlese $m\angle x$.

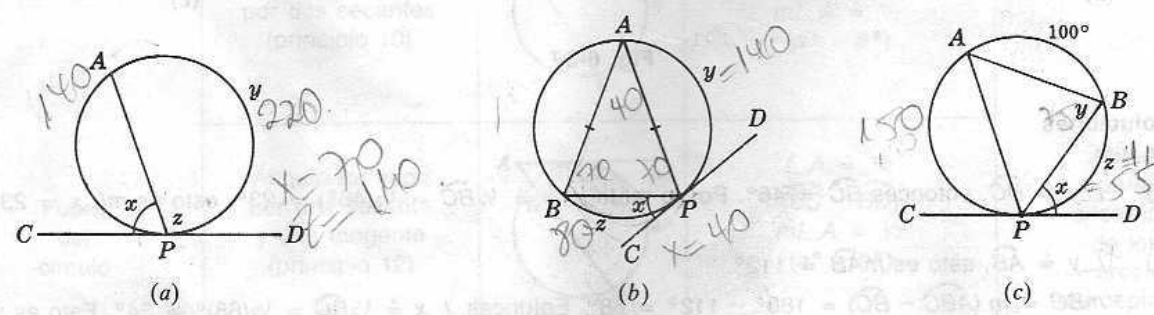


Fig. 6-39

Soluciones

(*a*) $\angle z \doteq \frac{1}{2}\widehat{y} = \frac{1}{2}(220°) = 110°$. Por lo tanto $m\angle x = 180° - 110° = 70°$.

(*b*) Dado que $AB = AP$, $m\widehat{AB} = m\widehat{y} = 140°$. Entonces, $m\widehat{z} = 360° - 140° - 140° = 80°$. Dado que $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{z} = 40°$, $m\angle x = 40°$.

(*c*) $\angle y \doteq \frac{1}{2}\widehat{AP}$, por lo tanto $m\widehat{AP} = 150°$. Entonces $m\widehat{z} = 360° - 100° - 150° = 110°$. Dado que $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{z} = 55°$, $m\angle x = 55°$.

6.13 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 10

(*a*) Si $m\angle x = 95°$ en la figura 6-40 (*a*), calcúlese $m\widehat{y}$.

(*b*) Si $m\widehat{y} = 80°$ en la figura 6-40 (*b*), calcúlese $m\angle x$.

(*c*) Si $m\widehat{x} = 78°$ en la figura 6-40 (*c*), calcúlese $m\angle y$.

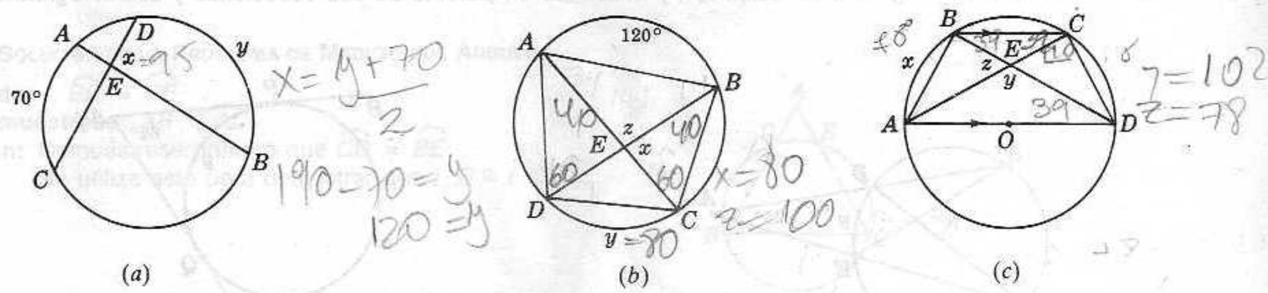


Fig. 6-40

Soluciones

(*a*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{y})$; así $95° = \frac{1}{2}(70° + m\widehat{y})$, por lo tanto, $m\widehat{y} = 120°$.

(*b*) $\angle z \doteq \frac{1}{2}(\widehat{y} + \widehat{AB}) = \frac{1}{2}(80° + 120°) = 100°$. Entonces, $m\angle x = 180° - m\angle z = 80°$.

(*c*) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, ya que $m\widehat{CD} = m\widehat{x} = 78°$. También, $\angle z \doteq \frac{1}{2}(\widehat{x} + \widehat{CD}) = 78°$. Entonces, $m\angle y = 180° - m\angle z = 102°$.

6.14 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 11 A 13

(*a*) En la figura 6-41(*a*), si $m\angle x = 40°$, calcúlese $m\widehat{y}$.

(*b*) En la figura 6-41(*b*), si $m\angle x = 67°$, calcúlese $m\widehat{y}$.

(*c*) En la figura 6-41(*c*), si $m\angle x = 61°$, calcúlese $m\widehat{y}$.

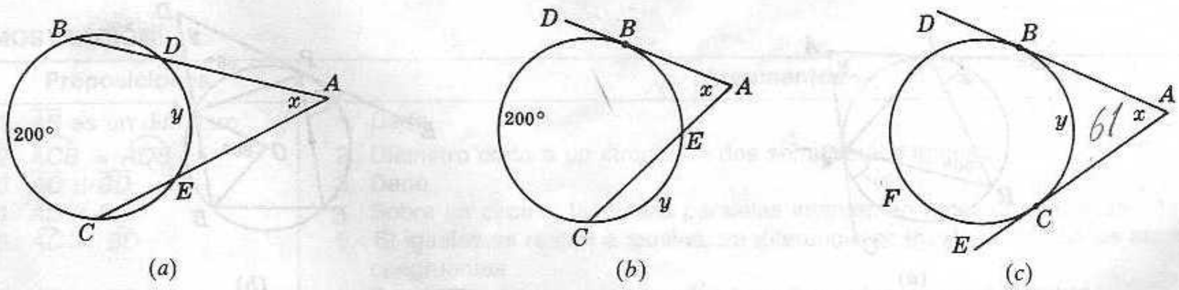


Fig. 6-41

Soluciones

(*a*) $x \doteq \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{y})$, entonces $40° = \frac{1}{2}(200° - m\overset{\frown}{y})$ o $m\overset{\frown}{y} = 120°$

(*b*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BE})$, entonces $67° = \frac{1}{2}(200° - m\overset{\frown}{BE})$o $m\overset{\frown}{BE} = 66°$
Entonces $m\overset{\frown}{y} = 360° - 200° - 66° = 94°$.

(*c*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BFC} - \overset{\frown}{y})$, y $m\overset{\frown}{BFC} = 360° - m\overset{\frown}{y}$. Entonces: $61° = \frac{1}{2}[(360° - m\overset{\frown}{y}) - m\overset{\frown}{y})] = 180° - m\overset{\frown}{y}$.
Así, $m\overset{\frown}{y} = 119°$.

6.15 Cálculo de Arcos por medio de un Sistema de Ecuaciones con Dos Incógnitas

En cada inciso de la figura 6-42, calcule x, y utilizando un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

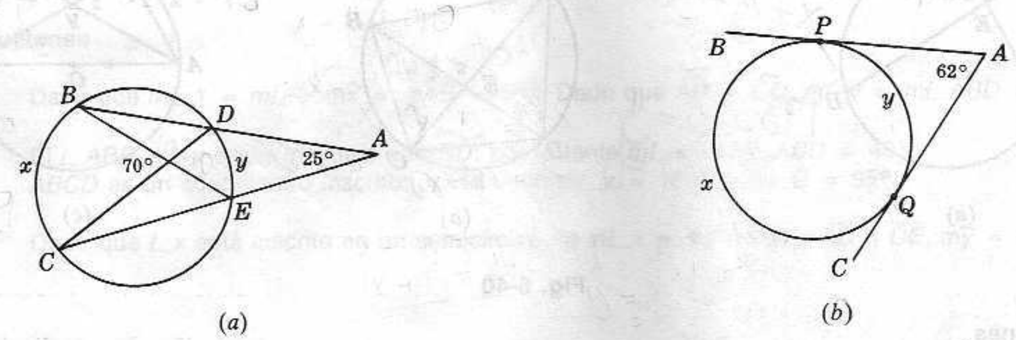


Fig. 6-42

Soluciones

(*a*) Por el principio 10, $70° = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{x} + m\overset{\frown}{y})$
Por el principio 11, $25° = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{x} - m\overset{\frown}{y})$
La suma de las ecuaciones deviene en $m\overset{\frown}{x} = 95°$. La diferencia de las mismas resulta en $m\overset{\frown}{y} = 45°$.

(*b*) Dado que $m\overset{\frown}{x} + m\overset{\frown}{y} = 360°$, $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{x} + m\overset{\frown}{y}) = 180°$.
Por el principio 13, $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{x} - m\overset{\frown}{y}) = 62°$.
La adición de las ecuaciones deviene en $m\overset{\frown}{x} = 242°$. La diferencia de las mismas resulta en $m\overset{\frown}{y} = 118°$.

6.16 Medición de Ángulos y Arcos en General

En cada inciso de la figura 6-43, determine x, y.

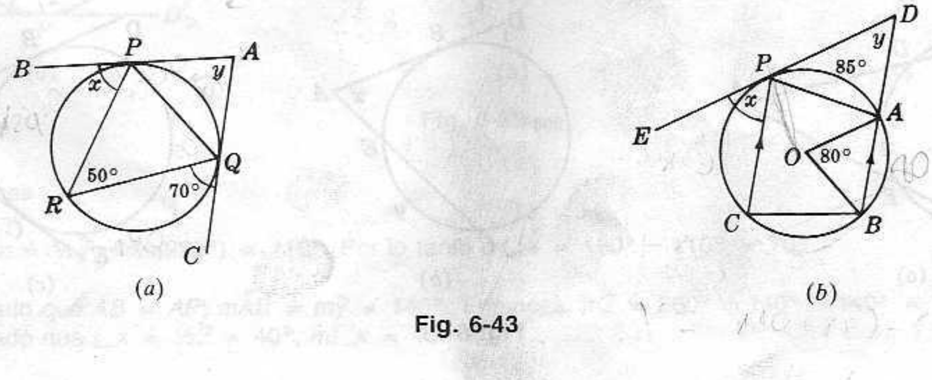


Fig. 6-43

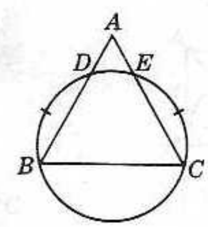
Soluciones

(*a*) Por el principio 2, $50° = ½m\widehat{PQ}$ o $m\widehat{PQ} = 100°$. También, por el principio 9, $70° = ½m\widehat{QR}$ o $m\widehat{QR} = 140°$.
Entonces, $m\widehat{PR} = 360° - m\widehat{PQ}\ m\widehat{QR} = 120°$.
Por el principio 9, $x = ½m\widehat{PR} = 60°$.
Por el principio 13, $y = ½(m\widehat{PRQ} - m\widehat{PQ}) = ½(260° - 100°) = 80°$.

(*b*) Por el principio 1, $m\widehat{AB} = 80°$. También, por el principio 8, $m\widehat{BC} = m\widehat{PA} = 85°$. Entonces $m\widehat{PC} = 360° - m\widehat{PA} - m\widehat{AB} - m\widehat{BC} = 100°$.
Por el principio 9, $x = ½m\widehat{PC} = 55°$.
Por el principio 12, $y = ½(m\widehat{PCB} - m\widehat{PA}) = ½(195° - 85°) = 55°$.

6.17 SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Dado: $\widehat{BD} = \widehat{CE}$
Demuéstrese: $AB = AC$
Plan: Demuéstrese primero que $\widehat{CD} = \widehat{BE}$.
Se utiliza esto para demostrar que $\angle B \cong \angle C$.



DEMOSTRACIÓN:

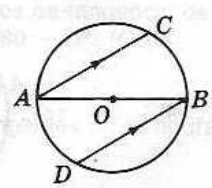
Proposiciones	Argumentos
1. $\widehat{BD} = \widehat{CE}$	1. Dado.
2. $\widehat{DE} = \widehat{DE}$	2. Propiedad reflexiva.
3. $\widehat{BE} = \widehat{CD}$	3. Si iguales se suman a iguales su suma es igual.
4. $\angle B \cong \angle C$	4. En un círculo, los ángulos que tengan arcos interceptados iguales son congruentes.
5. $AB = AC$	5. En un triángulo, los lados opuestos a ángulos congruentes son iguales en longitud.

6.18 SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE MEDIDAS DE ÁNGULOS FORMULADO EN PALABRAS

Demuestre que las cuerdas paralelas dibujadas en los extremos de un diámetro, son iguales en longitud.

Soluciones

Dado: círculo O
$\overline{AB}$ es un diámetro.
$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
Demuéstrese: $AC = BD$
Plan: Demuéstrese $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB}$ es un diámetro.	1. Dado.
2. $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$	2. Diámetro corta a un círculo en dos semicírculos iguales.
3. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$	3. Dado.
4. $AD \cong BC$	4. Sobre un círculo, las líneas paralelas interceptan arcos congruentes.
5. $\widehat{AC} = \widehat{BD}$	5. Si iguales se restan a iguales, su diferencia es igual. Definición de arcos congruentes.
6. $AC = BD$	6. En un círculo, los arcos iguales tienen cuerdas de igual longitud.

Problemas complementarios

1. Efectúe las demostraciones requeridas en la figura 6-44. (6.3)

(a) **Dado:** $AB = DE$, $AC = DF$
Demuéstrese: $\angle B \cong \angle E$

(b) **Dado:** círculo O, $AB = BC$, Diámetro $\overline{BD}$
Demuéstrese: $\overline{BD}$ bisecta $\angle AOC$

(c) **Dado:** círculo O, $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
Demuéstrese: $\angle AOC \cong \angle BOD$

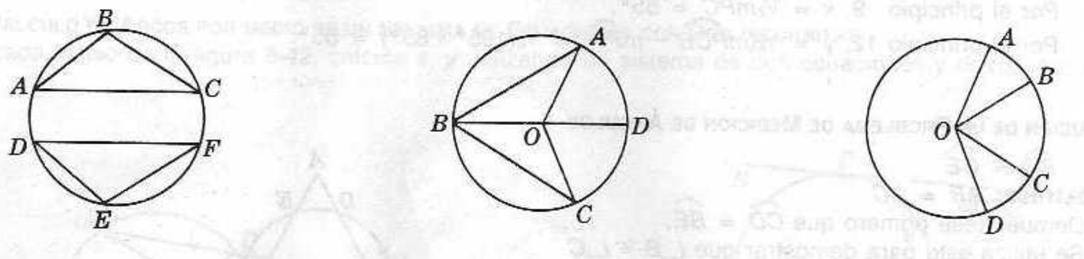


Fig. 6-44

2. Efectúe las demostraciones requeridas en la figura 6-45. (6.3)

(a) **Dado:** $AB = AC$
Demuéstrese: $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$

(b) **Dado:** $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
Demuéstrese: $AB = AC$

(c) **Dado:** círculo O, $AB = AD$, $\overline{AC}$ diámetro
Demuéstrese: $BC = CD$

(d) **Dado:** círculo O, $AB = AD$, $BC = CD$
Demuéstrese: $\overline{AC}$ es un diámetro

(e) **Dado:** $AD = BC$
Demuéstrese: $AC = BD$

(f) **Dado:** $AC = BD$
Demuéstrese: $AD = BC$

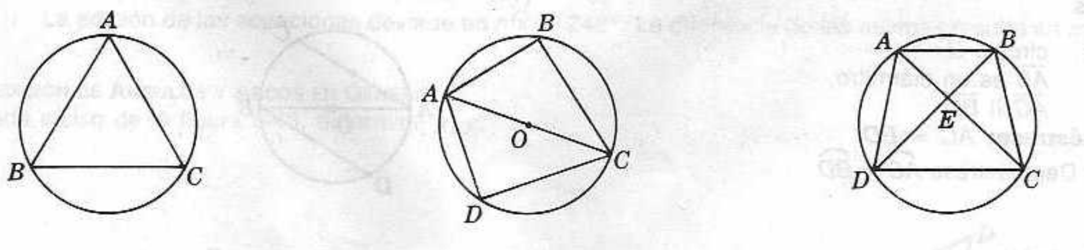


Fig. 6-45

3. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones: (6.4)

(a) Si un radio bisecta una cuerda, entonces bisecta sus arcos.

(b) Si un diámetro bisecta al arco mayor de una cuerda, entonces es perpendicular a la cuerda.

(c) Si un diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces bisecta a la cuerda y a sus arcos.

4. Demuéstrese cada uno de los siguientes puntos: (6.4)

(*a*) Un radio que pasa por el punto de intersección de dos cuerdas congruentes, bisecta al ángulo formado por ellas.

(*b*) Si dos cuerdas dibujadas desde los extremos de un diámetro hacen ángulos congruentes con el diámetro entonces, son cuerdas congruentes.

(*c*) En un círculo, las cuerdas congruentes son equidistantes del centro del círculo.

(*d*) En un círculo, las cuerdas que son equidistantes del centro son congruentes.

5. Resuelva lo siguiente suponiendo que *t*, *t′* y *t″*, en la figura 6-46, sean tangentes. (6.5)

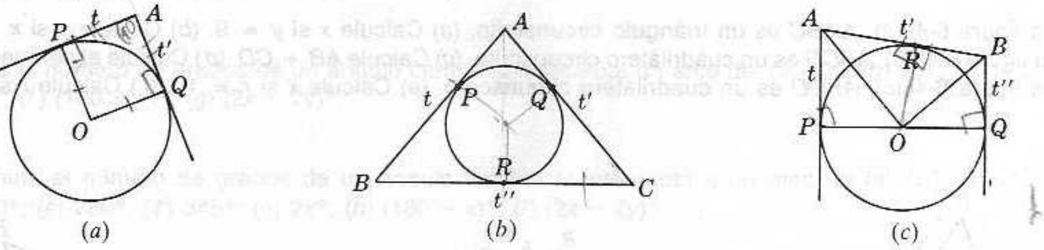


Fig. 6-46

(*a*) En la figura 6-46(*a*), si $m\angle A = 90°$, ¿qué tipo de cuadrilátero es *PAQO*? cuadrado

(*b*) En la figura 6-46(*b*), si $BR = RC$, ¿qué tipo de triángulo es *ABC*?

(*c*) En la figura 6-46(*c*), si $\overline{PQ}$ es un diámetro, ¿qué tipo de cuadrilátero es *PABQ*?

(*d*) En la figura 6-46(*c*), ¿qué tipo de triángulo es *AOB*?

6. En un círculo *O*, los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se dibujan hasta los puntos de tangencia de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Calcule $m\angle AOB$ si la $m\angle APB$ es igual a: (*a*) 40°; (*b*) 120°; (*c*) 90°; (*d*) $x°$; (*e*) $(180 - x)°$; (*f*) $(90 - x)°$. (6.6)

7. Resuelva cada uno de los problemas siguientes (*t* y *t′* son tangentes en la figura 6-47). (6.6)

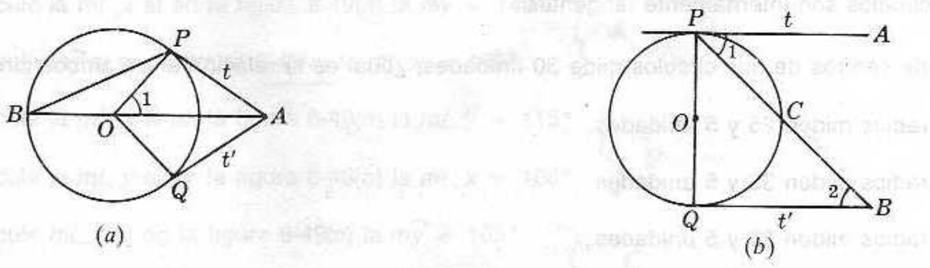


Fig. 6-47

En la figura 6-47(*a*):

(*a*) Calcule $m\angle PAQ$ si $m\angle POQ = 80°$.

(*b*) Calcule $m\angle 1$ y $m\angle PAQ$ si $m\angle PBO = 25°$.

(*c*) Calcule $m\angle 1$ y $m\angle PBO$ si $m\angle PAQ = 72°$.

En la figura 6-47(*b*):

(*d*) Calcule $m\angle 2$ si $\overline{PB}$ bisecta al $\angle APQ$.

(*e*) Calcule $m\angle 2$ si $m\angle 1 = 35°$.

(*f*) Calcule $m\angle 1$ si $PQ = QB$.

8. En la figura 6-48(*a*), $\triangle ABC$ es un triángulo circunscrito. (*a*) Calcule x si $y = 9$. (*b*) Calcule y si $x = 25$. En la figura 6-48(*b*), $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. (*c*) Calcule $AB + CD$. (*d*) Calcule el perímetro de $ABCD$. En la figura 6-48(*c*), $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. (*e*) Calcule x si $r = 10$. (*f*) Calcule r si $x = 25$. (6.7)

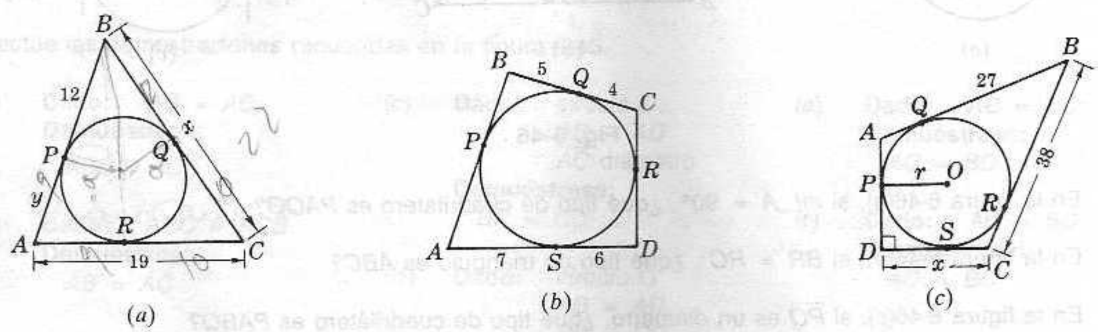


Fig. 6-48

9. Si dos círculos tienen radios de 20 y 13 respectivamente, calcule su línea de centros si: (6.8)

(*a*) Los círculos son concéntricos.

(*b*) Los círculos se encuentran separados por 7 unidades.

(*c*) Los círculos son externamente tangentes.

(*d*) Los círculos son internamente tangentes.

10. Si la línea de centros de dos círculos mide 30 unidades, ¿cuál es la relación entre ambos círculos si: (6.8)

(*a*) Sus radios miden 25 y 5 unidades.

(*b*) Sus radios miden 35 y 5 unidades.

(*c*) Sus radios miden 20 y 5 unidades.

(*d*) Sus radios miden 25 y 10 unidades.

11. ¿Cuál es la relación entre dos círculos si su línea de centros es: (*a*) 0; (*b*) igual a la diferencia de sus radios; (*c*) igual a la suma de sus radios; (*d*) mayor que la suma de sus radios; (*e*) menor que la diferencia de sus radios y mayor que 0; (*f*) mayor que la diferencia de sus radios pero menor que su suma?

12. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados. (6.9)

(*a*) La línea del centro de un círculo a un punto externo bisecta al ángulo formado por las tangentes al círculo desde ese punto.

(*b*) Si dos círculos son externamente tangentes entonces su tangente interna común bisecta a una tangente externa común.

(*c*) Si dos círculos son ajenos entre sí entonces sus tangentes internas comunes son congruentes.

(*d*) En un cuadrilátero circunscrito, la suma de las longitudes de los dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos.

13. Calcule el número de grados de un ángulo central si intercepta un arco de: (*a*) 40°; (*b*) 90°; (*c*) 170°; (*d*) 180°; (*e*) $2x$°; (*f*) $(180 - x)$°; (*g*) $(2x - 2y)$°. (6.10)

14. Determine el número de grados de un ángulo inscrito si intercepta a un arco de (*a*) 40°; (*b*) 90°; (*c*) 170°; (*d*) 180°; (*e*) 260°; (*f*) 348°; (*g*) $2x$°; (*h*) $(180 - x)$°; (*i*) $(2x - 2y)$°. (6.10)

15. Calcule el número de grados del arco interceptado por: (6.10)

(*a*) Un ángulo central de 85°.

(*b*) Un ángulo inscrito de 85°.

(*c*) Un ángulo central de c°.

(*d*) Un ángulo inscrito de i°.

(*e*) El ángulo central de un triángulo formado por dos radios y una cuerda igual a un radio.

(*f*) El ángulo más pequeño de un triángulo inscrito cuyos ángulos interceptan arcos que están en proporción de 1:2:3.

16. Encuentre el número de grados de cada uno de los arcos interceptados por ángulos de un triángulo inscrito, si las medidas de estos ángulos están en proporción de: (*a*) 1:2:3; (*b*) 2:3:4; (*c*) 5:6:7; (*d*) 1:4:5. (6.10)

17. (*a*) Calcule la $m\angle x$ si en la figura 6-49(*a*) la $m\widehat{y} = 140°$. (610)

(*b*) Calcule $m\widehat{y}$ si en la figura 6-49(*a*) la $m\angle x = 165°$. a

(*c*) Calcule la $m\angle x$ si en la figura 6-49(*b*) la $m\angle y = 115°$.

(*d*) Calcule la $m\angle y$ si en la figura 6-49(*b*) la $m\angle x = 108°$. b

(*e*) Calcule $m\angle x$ si en la figura 6-49(*c*) la $m\widehat{y} = 105°$.

(*f*) Calcule la $m\widehat{y}$ si en la figura 6-49(*c*) la $m\angle x = 96°$. c

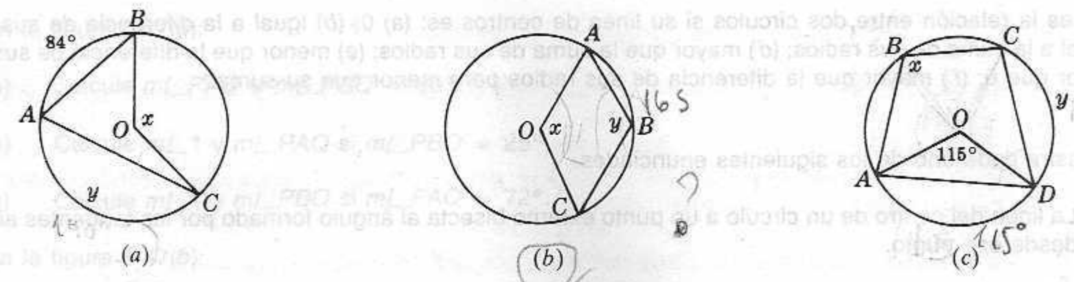


Fig. 6-49

18. En la figura 6-50, $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en el círculo, determine: (6.11)

(a) $m\angle A$ si $m\angle C = 45°$.

(b) $m\angle B$ si $m\angle D = 90°$.

(c) $m\angle C$ si $m\angle A = x°$.

(d) $m\angle D$ si $m\angle B = (90 - x)°$.

(e) $m\angle A$ si $m\widehat{BAD} = 160°$.

(f) $m\angle B$ si $m\widehat{ABC} = 200°$.

(g) $m\angle C$ si $m\widehat{BC} = 140°$ y $m\widehat{CD} = 110°$.

(h) $m\angle D$ si $m\angle D{:}m\angle B = 2{:}3$.

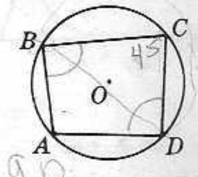


Fig. 6-50

19. Si BC y AD son los lados paralelos del trapezoide inscrito $ABCD$, calcule en la figura 6-51: (6.11)

(a) $M\widehat{AB}$ si $m\widehat{CD} = 85°$.

(b) $m\widehat{CD}$ si $m\widehat{AB} = y°$.

(c) $m\widehat{AB}$ si $m\widehat{BC} = 60°$ y $m\widehat{AD} = 80°$.

(d) $m\widehat{CD}$ si $m\widehat{AD} + m\widehat{BC} = 170°$.

(e) $m\angle A$ si $m\angle D = 72°$.

(f) $m\angle A$ si $m\angle C = 130°$.

(g) $m\angle B$ si $m\angle C = 145°$.

(h) $m\angle B$ si $m\widehat{AD} = 90°$ y $m\widehat{AB} = 84°$.

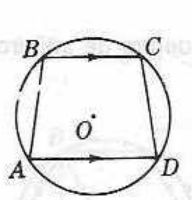


Fig. 6-51

20. Un diámetro es paralelo a una cuerda. Calcule el número de grados en el arco formado por el diámetro y la cuerda si la cuerda intercepta (*a*) un arco menor de 80°; (*b*) un arco mayor de 300°. (6.11)

21. Calcule *x* y *y* en cada inciso de la figura 6-52. (6.11)

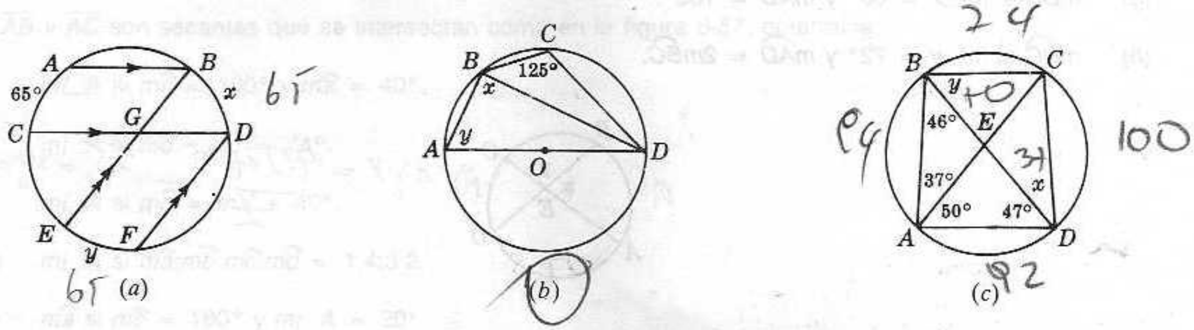


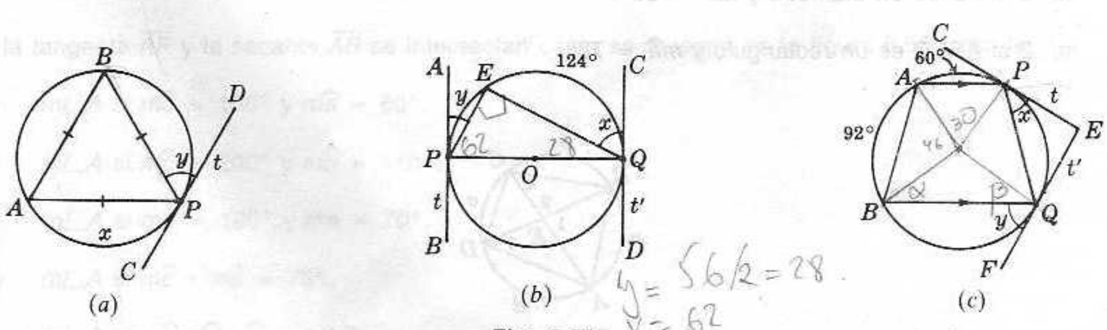
Fig.6-52

22. Calcule el número de grados del ángulo formado por una tangente y una cuerda dibujada hasta al punto de tangencia, si el arco interceptado tiene una medida de (*a*) 38°; (*b*) 90°; (*c*) 138°; (*d*) 180°; (*e*) 250°; (*f*) 334°; (*g*) $x°$; (*h*) $(360 - x)°$; (*i*) $(2x + 2y)°$. (6.12)

23. Calcule el número de grados del arco interceptado por un ángulo formado por una tangente y una cuerda dibujada hasta el punto de tangencia, si el ángulo mide (*a*) 55°; (*b*) $67\frac{1}{2}°$; (*c*) 90°; (*d*) 135°; (*e*) $(90 - x)°$; (*f*) $(180 - x)°$; (*g*) $(x - y)°$; (*h*) $3\frac{1}{2}x°$. (6.12)

24. Calcule el número de grados de un ángulo agudo formado por una tangente que pasa por un vértice, y el lado adjunto de un (*a*) cuadrado inscrito; (*b*) un triángulo equilátero inscrito; (*c*) un hexágono regular inscrito; (*d*) un decágono regular inscrito. (6.12)

25. Calcule *x* y *y* para cada inciso de la figura 6-53 (*t* y *t'* son tangentes). (6.12)



y = 56/2 = 28
y = 62

Fig. 6-53

26. Si $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas que se intersectan dentro de un círculo, como se muestra en la figura 6-54. Calcule: (6.13)

(*a*) $m\angle x$ si $m\widehat{AB} = 90°$ y $m\widehat{CD} = 60°$.

(*b*) $m\angle x$ si $m\widehat{AB}$ y $m\widehat{CD}$ son iguales a 75°.

(*c*) $m\angle x$ si $m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = 230°$.

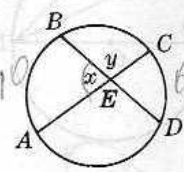
(*d*) $m\angle 2x$ si $m\widehat{BC} + m\widehat{AD} = 160°$.

(*e*) $m\widehat{AB} + m\widehat{CD}$ si $m\angle x = 70°$.

(*f*) $m\widehat{BC} + m\widehat{AD}$ si $m\angle x = 65°$.

(*g*) $m\widehat{BC}$ si $m\angle x = 60°$ y $m\widehat{AD} = 160°$.

(*h*) $m\widehat{BC}$ si $m\angle y = 72°$ y $m\widehat{AD} = 2m\widehat{BC}$.

90  60

a) $x = \frac{90+60}{2} = 75 \Rightarrow y = 105$

Fig. 6-54

27. Si $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales del cuadrilátero inscrito *ABCD* de la figura 6-55, calcule: (6.13)

(*a*) $m\angle 1$ si $m\widehat{a} = 95°$ y $m\widehat{c} = 75°$.

(*b*) $m\angle 1$ si $m\widehat{b} = 88°$ y $m\widehat{d} = 66°$.

(*c*) $m\angle 1$ si $m\widehat{b}$ y $m\widehat{d}$ son ambas iguales a 100°.

(*d*) $m\angle 1$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c}:m\widehat{d} = 1:2:3:4$.

(*e*) $m\angle 2$ si $m\widehat{b} + m\widehat{d} = m\widehat{a} + m\widehat{c}$.

(*f*) $m\angle 2$ si $\widehat{BC} \parallel \widehat{AD}$ y $m\widehat{a} = 70°$.

(*g*) $m\angle 2$ si $\overline{AD}$ es un diámetro y $m\widehat{b} = 80°$.

(*h*) $m\angle 2$ si *ABCD* es un rectángulo y $m\widehat{a} = 70°$.

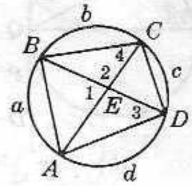


Fig. 6-55

28. Calcule x y y para cada inciso de la figura 6-56. (6.13)

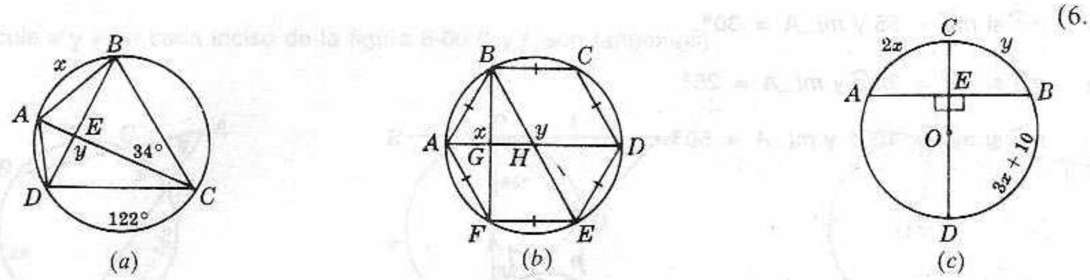


Fig. 6-56

29. Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son secantes que se intersectan como en la figura 6-57, determine: (6.14)

(a) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = 100°$ y $m\widehat{a} = 40°$.

(b) $m\angle A$ si $m\widehat{c} - m\widehat{a} = 74°$.

(c) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = m\widehat{a} + 40°$.

(d) $m\angle A$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c}:m\widehat{d} = 1:4:3:2$.

(e) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 160°$ y $m\angle A = 20°$.

(f) $m\widehat{c}$ si $m\widehat{a} = 60°$ y $m\angle A = 35°$.

(g) $m\widehat{c} - m\widehat{a}$ si $m\angle A = 47°$.

(h) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 3\widehat{a}$ y $m\angle A = 25°$.

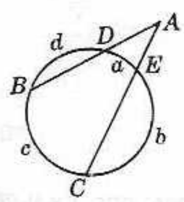


Fig. 6-57

30. Si la tangente $\overline{AP}$ y la secante $\overline{AB}$ se intersectan como se muestra en la figura 6-58, calcule: (6.14)

(a) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = 150°$ y $m\widehat{a} = 60°$.

(b) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = 200°$ y $m\widehat{b} = 110°$.

(c) $m\angle A$ si $mb = 120°$ y $ma = 70°$.

(d) $m\angle A$ si $m\widehat{c} - m\widehat{a} = 73°$.

(e) $m\angle A$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c} = 1:4:7$.

(*f*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 220°$ y $m\angle A = 40°$.

(*g*) $m\widehat{c}$ si $m\widehat{a} = 55$ y $m\angle A = 30°$.

(*h*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 3m\widehat{a}$ y $m\angle A = 25°$.

(*i*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{b} = 100°$ y $m\angle A = 50°$.

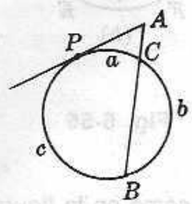


Fig. 6-58

31. Si $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ son tangentes que se intersectan como se muestra en la figura 6-59, determine: (6.14)

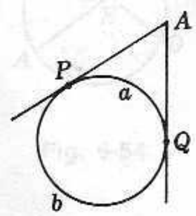


Fig. 6-59

(*a*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} = 200°$

(*b*) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = 95°$

(*c*) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = x°$

(*d*) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = (90 - x)°$

(*e*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} = 3m\widehat{a}$

(*f*) ma si $m\widehat{b} = m\widehat{a} + 50°$

(*g*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} - m\widehat{a} = 84°$.

(*h*) $m\angle A$ si $m\widehat{b}:m\widehat{a} = 5:1$

(*i*) $m\angle A$ si $m\widehat{b}:m\widehat{a} = 7:3$

(*j*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} = 5m\widehat{a} - 60°$.

(*k*) $m\widehat{a}$ si $m\angle A = 35°$

(*l*) $m\widehat{a}$ si $m\angle A = y°$

(m) $m\widehat{b}$ si $m\angle A = 60°$ (n) $m\widehat{b}$ si $m\angle A = x°$ (o) $m\widehat{b}$ si $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$

32. Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-60 (t y t' son tangentes) (6.14)

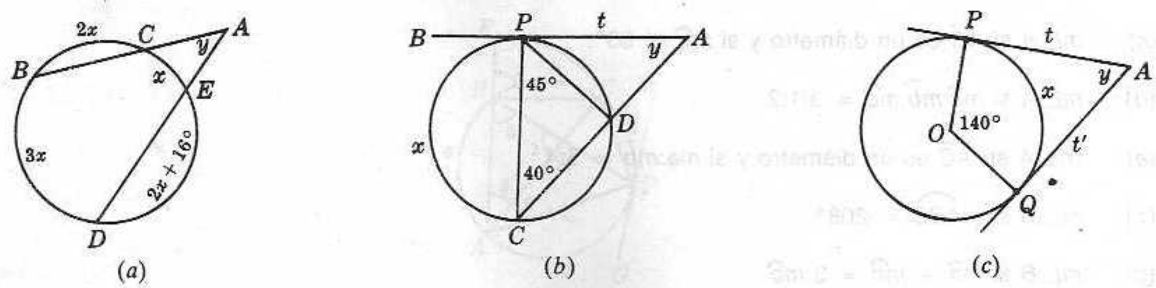


Fig. 6-60

33. Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son secantes que se intersectan como se muestra en la figura 6-61, calcule: (6.15)

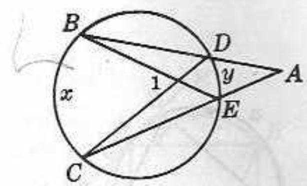


Fig. 6-61

(a) $m\widehat{x}$ si $m\angle 1 = 80°$ y $m\angle A = 40°$.

(b) $m\widehat{x}$ si $m\angle 1 + m\angle A = 150°$.

(c) $m\widehat{x}$ si $\angle 1$ y $\angle A$ son suplementarios.

(d) $m\widehat{y}$ si $m\angle 1 = 95$ y $m\angle A = 45°$.

(e) $m\widehat{y}$ si $m\angle 1 = m\angle A = 22\frac{1}{2}°$.

(f) $m\widehat{y}$ si $m\widehat{x} + m\widehat{y} = 190°$ y $m\angle A = 50°$.

34. Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-62 (t y t' son tangentes). (6.15)

$\frac{X-Y}{2} = 55 \to$ ① $X - Y = 110$

② $\frac{X+Y}{2} = 95 \to 190$

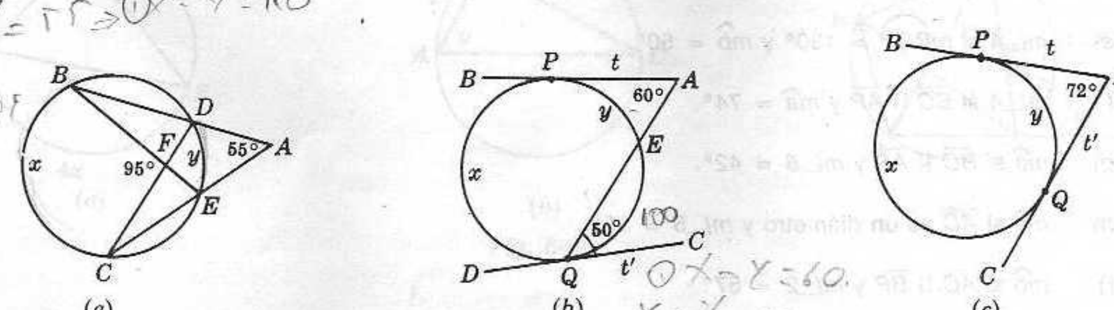


Fig. 6-62

① $X - Y = 60$

$\frac{X-Y}{2} = 60$

② $X + Y = 260$

35. Si ABC es un triángulo inscrito como se muestra en la figura 6-63, encuentre: (6.16)

(a) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = 110°$ y $m\widehat{c} = 200°$.

(b) $m\angle A$ si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $m\widehat{a} = 102°$.

(c) $m\angle A$ si $\overline{AC}$ es un diámetro y si $m\widehat{a} = 80°$.

(d) $m\angle A$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c} = 3:1:2$

(e) $m\angle A$ en $\overline{AC}$ es un diámetro y si $ma:mb = 5:4$

(f) $m\angle B$ si $m\widehat{ABC} = 208°$

(g) $m\angle B$ si $m\widehat{a} + m\widehat{b} = 3\, m\widehat{c}$

(h) $m\angle B$ si $m\widehat{a} = 75°$ y $m\widehat{c} = 2m\widehat{b}$

(i) $m\angle C$ si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y si $m\widehat{a} = 5m\widehat{b}$

(j) $m\widehat{c}$ si $m\angle A: m\widehat{B}:m\angle C = 5:4:3$

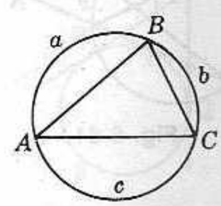


Fig. 6-63

36. Si en la figura 6-64, $ABCP$ es un cuadrilátero inscrito, $\overleftrightarrow{PD}$ es una tangente y $\overrightarrow{AF}$ una secante. Encuentre: (6.16)

(a) $m\angle 1$ si $m\widehat{a} = 94°$ y $m\widehat{c} = 54°$.

(b) $m\angle 2$ si $\overline{AP}$ es un diámetro.

(c) $m\angle 3$ si $m\widehat{CPA} = 250°$.

(d) $m\angle 3$ si $m\angle ABC = 120°$.

(e) $m\angle 4$ si $m\widehat{BCP} = 130°$ y $m\widehat{b} = 50°$.

(f) $m\angle 4$ si $\overline{BC} \parallel \overline{AP}$ y $m\widehat{a} = 74°$.

(g) $m\widehat{a}$ si $\overline{BC} \parallel \overline{AP}$ y $m\angle 6 = 42°$.

(h) $m\widehat{a}$ si $\overline{AC}$ es un diámetro y $m\angle 5 = 35°$.

(i) $m\widehat{b}$ si $\overline{AC} \parallel \overline{BP}$ y $m\angle 2 = 57°$.

(j) $m\widehat{c}$ si $\overline{AC}$ y $\overline{BP}$ son diámetros y $m\angle 5 = 41°$.

(k) $m\widehat{a}$ si $m\angle 1 = 95°$ y $m\widehat{b} = 95°$.

(l) $m\angle CPA$ si $m\angle 3 = 79°$.

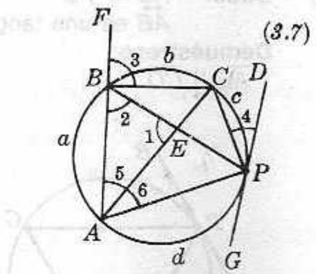
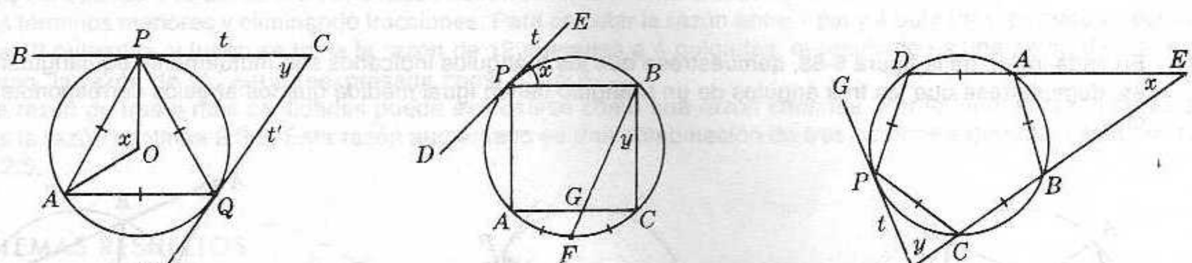


Fig. 6-64

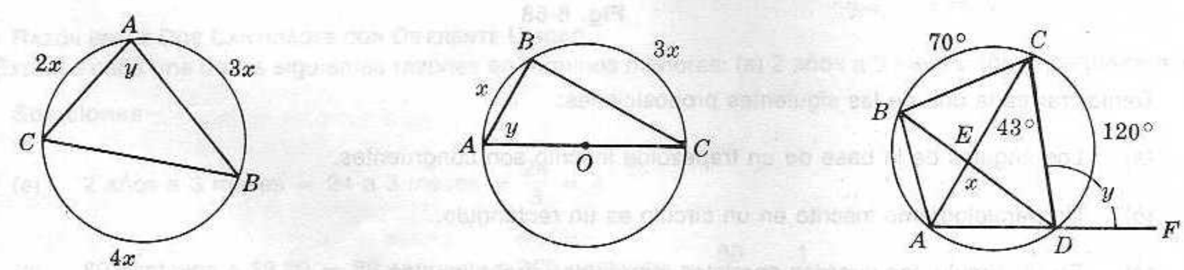
37. Determine x y y en cada inciso de la figura 6-65 (t y t' son tangentes). (6.16)



(a) (b) *PBCA* es un cuadrado inscrito (c)

Fig. 6-65

38. Calcular x y y en cada inciso de la figura 6-66. (6.16)



(a) (b) (c)

Fig. 6-66

39. Efectúe la demostración requerida en la figura 6-67. (6.17)

(*a*) **Dado:** $\overline{AC}$ bisecta $\angle A$
Demuéstrese:
$\overline{BC} \cong \overline{CD}$

(*b*) **Dado:** $\overline{BC} \cong \overline{CD}$
Demuéstrese:
$\overline{AC}$ bisecta $\angle A$

(*c*) **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AB}$ es una tangente
Demuéstrese:
$PC = PD$

(*d*) **Dado:** $PC = PD$
$\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente
Demuéstrese:
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

(*e*) **Dado:** $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$
Demuéstrese:
$CE = ED$

(*f*) **Dado:** $CE = EB$
Demuéstrese:
$\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$

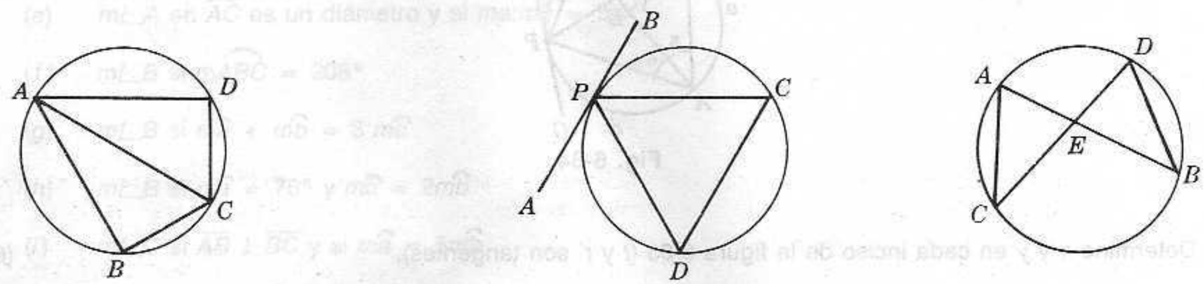
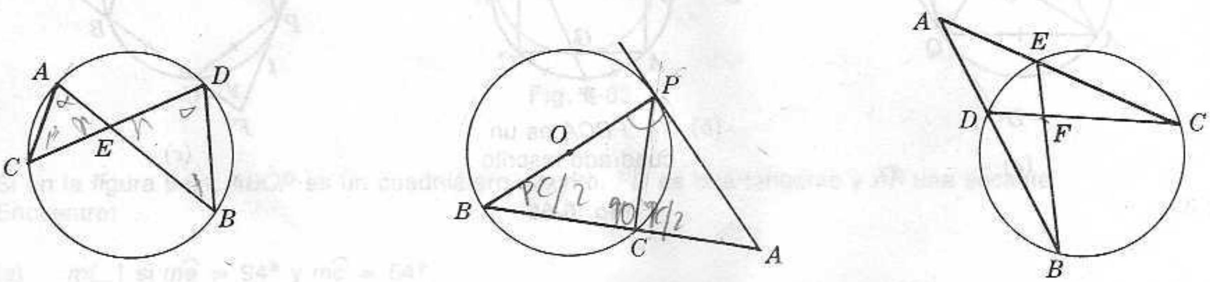


Fig. 6-67

40. En cada inciso de la figura 6-68, demuéstrese que los triángulos indicados son mutuamente equiangulares; esto es, demuéstrese que los tres ángulos de un triángulo tienen igual medida que los ángulos correspondientes del otro. (6.17)



(*a*) $\triangle AEC$ y $\triangle DEB$ (*b*) $\triangle APC$ y $\triangle APB$ (AP es una tangente) (*c*) $\triangle ABE$ y $\triangle ACD$

Fig. 6-68

41. Demostrar cada una de las siguientes proposiciones: (6:18)

(*a*) Los ángulos de la base de un trapezoide inscrito son congruentes.

(*b*) Un paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo.

(*c*) En un círculo, las cuerdas paralelas interceptan arcos iguales.

(*d*) Las diagonales dibujadas desde un vértice de un pentágono regular inscrito trisectan al ángulo del vértice.

(*e*) Si una tangente que pasa por un vértice de un triángulo inscrito es paralela a su lado opuesto entonces el triángulo es isósceles.